PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ EN THÉORIE DES FAISCEAUX
(D'APRÈS UN TRAVAIL AVEC P. SCHAPIRA)

Andrea D'Agnolo

§1. Introduction

Dans ce paragraphe toute variété (et morphisme de variétés) sera complexe analytique.

1.1. Soit X une variété, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent (i.e. un système d'équations aux dérivées partielles) et $Y \subset X$ une sous-variété non-caractéristique pour $\mathcal{M}$ (i.e. telle que le fibré conormal $T^*_Y X$ à Y ne rencontre pas la variété caractéristique $\mathrm{car}(\mathcal{M})$ au dehors de la section nulle $T^*_X X$). On note par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X et par $\mathcal{M}_Y$ la restriction de $\mathcal{M}$ à Y au sens des $\mathcal{D}$-modules (i.e. le système induit).

Théorème de Cauchy-Kowalevski-Kashiwara. *On a l'isomorphisme naturel*

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y). \tag{1.1}$$

Dans le cas où Y est une hypersurface et $\mathcal{M}$ est associé à un opérateur différentiel P de degré m (i.e. $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X\, P$), on retrouve le théorème classique de Cauchy-Kowalevski. En effet on a $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \simeq [\mathcal{O}_X \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X]$ et $\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y) \simeq \mathcal{O}_Y^m$. La cohomologie de (1.1) nous dit alors en degré 0 que $\mathrm{Ker}P|_Y \simeq \mathcal{O}_Y^m$ (i.e. on peut résoudre $Pu = 0$, $\gamma(u) = (w_i) \in \mathcal{O}_Y^m$ au voisinage de Y) et en degré 1 que $\mathrm{Coker}P|_Y = 0$ (i.e. on peut résoudre $Pu = v \in \mathcal{O}_X$ au voisinage de Y).

1.2. On peut se poser un problème analogue au précédent en remplaçant $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ par divers faisceaux de fonctions holomorphes ramifiées. Considérons par exemple la situation suivante: $Z \subset Y$ est une hypersurface; $\mathrm{car}(\mathcal{M}) \subset V$, où V est une variété involutive de $\dot{T}^*X$, lisse sur $\dot{T}^*X = T^*X \setminus T^*_X X$, et telle que son flot Hamiltonien issue de $\dot{T}^*_Z Y$ soit la réunion de m Lagrangiennes disjointes $\dot{T}^*_{Z_i} X$, avec Z_i hypersurface de X transverse à Y, $Y \cap Z_i = Z$. Si $\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y}$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur Y ramifiées le long de Z et $\sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X}$ est le faisceau des sommes de fonctions holomorphes sur X ramifiées le long des Z_i, le problème de Cauchy à données holomorphes ramifiées se traduit par l'isomorphisme

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X})|_Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y})|_Z \tag{1.2}$$

Appeared in: Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1991–1992, École Polytech., Palaiseau, 1992, pp. Exp. No. VII, 9.

(voir le Théorème 3.1 pour un énoncé précis).

- Dans le cas où $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ (1.2) correspond au théorème de Hamada, Leray et Wagschal [H-L-W]. La démonstration de ce résultat donnée dans [H-L-W] consiste à travailler sur le revêtement universel de $X \setminus Z_i$ et à utiliser des opérateurs integro-différentiels et diverses estimations.
- Une autre démonstration, basée sur l'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels et des transformations de contact complexes, a été proposée par Pallu de la Barrière et Schapira [P-S].
- Le cas des systèmes est traité par Kashiwara et Schapira [K-S 1] pour des ramifications de type logarithmique (sous une hypothèse géométrique plus faible: "non-microcaractéristique" au lieu que "multiplicitées constantes").
- Le théorème de Hamada, Leray et Wagschal pour un opérateur a été récemment généralisé au cas des fonctions holomorphes ramifiées sur $X \setminus \cup_i Z_i$ par Leitchnam [Le 1].

1.3. On peut unifier les énoncés précédents en remarquant qu'un faisceau de fonctions holomorphes ramifiées le long d'une sous-variété T de X (ramifiées générales, ramifiées de type logarithmique, etc.) peut s'écrire comme $\mathrm{R}\mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_X)$ où K est un faisceau localement constant sur $X \setminus T$ (cf. §3.1). Le complexe des solutions ramifiées "du type K" d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ est alors le complexe $\mathrm{R}\mathcal{H}om(K, F)$, où $F = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$. Le problème de Cauchy à données holomorphes ramifiées s'écrit donc sous la forme

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om(K, F)|_Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\mathcal{H}om(L, F|_Y)|_Z \tag{1.3}$$

pour K et L bien choisis.

Nous nous proposons de donner ici un théorème général de ce type (basé sur une version microlocale due à [K-S 2]) et de montrer comment retrouver les résultats classiques énoncés plus haut (sauf celui de [Le 1]), ainsi d'ailleurs que d'autres résultats comme par exemple le cas de la "queue d'aronde" traité récemment dans ce séminaire par Leitchnam [Le 2]. Dans cette interprétation la variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est remplacée par le micro-support $\mathrm{SS}(F)$ du complexe F des solution holomorphes. On a en effet (cf. [K-S 2, ch. 11])

$$\mathrm{SS}(\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{car}(\mathcal{M}),$$

où l'inclusion $\cdot \subset \cdot$ (qui est la seule que nous utilisons ici) se déduit aisément du théorème de Cauchy-Kowaleski dans la version précisée de Leray [L].

§2. Le problème de Cauchy faisceautique

2.1. Nous énonçons dans ce paragraphe un théorème d'image inverse pour les faisceaux du type (1.3). Nous soulignons l'aspect purement faisceautique de ce résultat. En particulier:

- les variétés traitées sont analytiques réelles,
- il n'y a plus d'opérateurs différentiels.

2.2. Nous reprenons ici les notations de [K-S 1].

Soit X une variété analytique réelle et $\pi_X : T^*X \to X$ son fibré cotangent. On note $\dot{T}^*X := T^*X \setminus T^*_XX$. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés réelles. On note ${}^tf'$ et f_π les applications naturelles associées:

$$T^*Y \xleftarrow{{}^tf'} Y \times_X T^*X \xrightarrow{f_\pi} T^*X.$$

On pose $T^*_YX = {}^tf'^{-1}(T^*_YY)$. Si A et B sont deux sous-ensembles coniques de T^*X on note $C(A,B)$ le cône de Whitney de A le long de B. C'est un sous-ensemble biconique de $TT^*X \cong T^*T^*X$.

On note $\mathrm{D}^b(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels sur X. Si T est une partie localement fermée de X, on note $\mathbb{C}_T$ le faisceau qui vaut 0 sur $X \setminus T$ et qui est le faisceau constant de fibre $\mathbb{C}$ sur T. Si F est un objet de $\mathrm{D}^b(X)$, on lui associe son micro-support $\mathrm{SS}(F)$, un sous-ensemble conique, involutif et fermé de T^*X, et on dit que $f : Y \to X$ est non-caractéristique pour F si $f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(F)) \cap T^*_YX \subset Y \times_X T^*_XX$.

2.3. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés analytiques réelles et Z un sous-ensemble de Y. On se place dans le cadre suivant:

(i) F est un objet de $\mathrm{D}^b(X)$,
(ii) K_i $(i = 1, \dots, m)$ est un object faiblement $\mathbb{R}$-constructible de $\mathrm{D}^b(X)$,
(iii) L est un object faiblement $\mathbb{R}$-constructible de $\mathrm{D}^b(Y)$,
(iv) $\tau_i : K_i \to \mathbb{C}_X$ $(i = 1, \dots, m)$ est un morphisme,
(v) $\psi_i : L \to f^{-1}(K_i)$ $(i = 1, \dots, m)$ est un isomorphisme.

A partir des K_i, on définit un complexe K (à isomorphisme près) comme suit:

(vi) K est le troisième terme du triangle distingué $K \to \oplus_{i=1}^m K_i \xrightarrow{h} \oplus_{i=1}^{m-1}\mathbb{C}_X \xrightarrow{+1}$,

où h est le composé du morphisme $\oplus_{i=1}^m \tau_j$ avec le morphisme $\oplus_{i=1}^m \mathbb{C}_X \to \oplus_{i=1}^{m-1}\mathbb{C}_X$ donné par $(a_1, \dots, a_m) \mapsto (a_2 - a_1, \dots, a_m - a_{m-1})$.

Théorème 2.1. *On fait les hypothèses:*

(H1) *f est non-caractéristique pour F,*
(H2) *f est non-caractéristique pour K_i $(i = 1, \dots, m)$,*
(H3) *f_π est non-caractéristique pour $C(\mathrm{SS}(F), \mathrm{SS}(K_i))$ $(i = 1, \dots, m)$,*
(H4) *pour tout $p_Y \in \dot{\pi}_Y^{-1}(Z)$ il existe un ensemble fini $\{p_1, \dots, p_m\} \subset {}^tf'^{-1}(p_Y)$ tel que*

$$\begin{aligned}{}^tf'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(F)) &\subset \{p_1, \dots, p_m\},\\ {}^tf'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(K_i)) &\subset \{p_i\},\end{aligned}$$

(H5) *pour tout $y \in Z$, $f^{-1}(\tau_i) \circ \psi_i$ $(i = 1, \dots, m)$ induit un isomorphisme $\mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}L \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}\mathbb{C}_Y$.*

Alors pour $K \in \mathrm{D}^b(X)$ construit à partir des K_i comme dans (vi), on a un isomorphisme naturel induit par les ψ_i

$$f^{-1}\mathrm{R}\mathcal{H}om(K, F)\big|_Z \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\mathcal{H}om(L, f^{-1}F)\big|_Z. \tag{2.1}$$

Idée de la preuve. Suivant une technique introduite dans [K-S 1], on considère le morphisme de triangles distingués:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{R}\pi_{Y!}A & \longrightarrow & \mathrm{R}\pi_{Y*}A & \longrightarrow & \mathrm{R}\dot{\pi}_{Y*}A & \xrightarrow{+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathrm{R}\pi_{Y!}B & \longrightarrow & \mathrm{R}\pi_{Y*}B & \longrightarrow & \mathrm{R}\dot{\pi}_{Y*}B & \xrightarrow{+1}, \end{array} \tag{2.2}$$

où $A = \mathrm{R}^t f'_! f'^{-1}_\pi \mu\mathrm{hom}(K, F)$, $B = \mu\mathrm{hom}(L, f^{-1}F)$ et μhom désigne le bifoncteur de microlocalisation de [K-S 2]. Si l'on rappelle l'isomorphisme $\mathrm{R}\pi_{X*}\mu\mathrm{hom}(\cdot,\cdot) \simeq \mathrm{R}\mathcal{H}om(\cdot,\cdot)$, on s'aperçoit que le morphisme (2.1) n'est autre que la deuxième flèche verticale de (2.2). On est donc ramené à montrer que la première et la troisième flèche verticales de (2.2) sont des isomorphismes sur Z.

On déduit que la première flèche est un isomorphisme de l'hypothèse (H5). On traite ensuite la troisième flèche à l'aide du Théorème 6.7.1 de [K-S 2] en utilisant l'hypothèse (H3). Q.E.D.

2.4. Comme on l'a déjà dit, le Théorème 2.1 est l'équivalent faisceautique de la Proposition 4.2 de [K-S 1] concernant les $\mathcal{D}$-modules et, comme dans [K-S 1], sa preuve consiste essentiellement en la réduction de (2.1) à un énoncé microlocal. Cependant une nouvelle difficulté apparait ici. Dans le cas des $\mathcal{D}_X$-modules l'analyse microlocale est achevée dans le cadre des $\mathcal{E}_X$-modules. En théorie des faisceaux, le correspondant microlocale de $\mathrm{D}^b(X)$ est son localisé $\mathrm{D}^b(X;p)$ et ici le découpage est nettement plus difficile (faisant intervenir les notions de ind et pro-objets et d'image inverse microlocale $f^{-1}_{\mu,p}$). Le Théorème 2.1 présenté ici est en fait un corollaire de théorèmes plus généraux (cf. [D'A-S], [D'A]) par lesquels on arrive à traiter aussi d'autres applications intéressantes tel que le problème de Cauchy hyperbolique pour les hyperfonctions. Cet énoncé est cependant suffisant pour traiter les applications au problème de Cauchy ramifié.

§3. Problème de Cauchy holomorphe ramifié

Dans ce paragraphe nous montrons comme retrouver, à partir du Théorème 2.1, les résultats classiques sur le problème de Cauchy à données holomorphes ramifiées mentionnés dans l'introduction.

On se place ici à nouveau dans la catégorie des variétés analytiques complexes.

3.1. Soit X une variété, Y et Z_i $(i = 1,\dots,m)$ des hypersurfaces lisses de X et Z une hypersurface lisse de Y. On suppose que les Z_i sont deux à deux transverses et transverses à Y avec $Z_i \cap Y = Z$. Soient données des fonctions holomorphes $g : Y \to \mathbb{C}$, $g_i : X \to \mathbb{C}$ telles que $g_i \circ f = g$ et $Z = g^{-1}(0)$, $Z_i = g_i^{-1}(0)$, où on note par f l'immersion de Y dans X.

Si $p : \widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}} \to \mathbb{C}$ est le recouvrement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, le recouvrement universel $p_Y : \widetilde{Y_Z} \to Y$ de $Y \setminus Z$ est donné par $\widetilde{Y_Z} = \widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}} \times_{\mathbb{C}} Y$. Autrement dit on a le diagrame cartésien:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y_Z} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}} \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & \square & {\scriptstyle p}\downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}. \end{array}$$

Une section de $\mathcal{O}_{\widetilde{Y_Z}} \simeq p_Y^{-1}\mathcal{O}_Y$ définit une fonction holomorphe multiforme sur $Y \setminus Z$. Par le formalisme de Deligne [D] (cf. [A] pour une exposition adapté à notre cadre) on peut décrire le faisceau $\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y} := \mathrm{R}p_{Y*}p_Y^{-1}\mathcal{O}_Y$ des fonctions holomorphes ramifiées associées à p_Y sous une forme qui convient à l'énoncé du Théorème 2.1. On a en effet que $p_Y^{-1}\mathcal{O}_Y \simeq p_Y^!\mathcal{O}_Y$ et $p_{Y!}$ est un foncteur exact. Par dualité de Poincaré-Verdier on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Y/Z} &= \mathrm{R}p_{Y*}p_Y^{-1}\mathcal{O}_Y\\ &\simeq \mathrm{R}p_{Y*}\mathrm{R}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\widetilde{Z_Y}}, p_Y^!\mathcal{O}_Y)\\ &\simeq \mathrm{R}\mathcal{H}om(p_{Y!}\mathbb{C}_{\widetilde{Y_Z}}, \mathcal{O}_Y).\end{aligned}$$

On pose $K^{\mathrm{ram}}_{Z/Y} = p_{Y!}\mathbb{C}_{\widetilde{Y_Z}} = g^{-1}p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}}$.

Le récouvrement universel $p_i : \widetilde{X_{Z_i}} \to X$ de $X \setminus Z_i$ est donné par $\widetilde{X_{Z_i}} = \widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}} \times_{\mathbb{C}} X$. On a alors $\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X} = \mathrm{R}\mathcal{H}om(K^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X}, \mathcal{O}_X)$. Si K est le complexe construit dans (vi) à partir des $K_i = K^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X}$, le complexe $\sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X} := \mathrm{R}\mathcal{H}om(K, \mathcal{O}_X)$ est concentré en degré zéro et est défini par la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{O}_X)^{m-1} \longrightarrow \oplus_{i=1}^m \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X} \longrightarrow \sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X} \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

où la deuxième flèche est définie par $(f_1, \ldots, f_{m-1}) \mapsto (f_1, f_2 - f_1, \ldots, -f_{m-1})$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent tel que

$(3.2)_1$ f_π est non-caractéristique pour $C(\mathrm{car}(\mathcal{M}), \dot{T}^*_{Z_i}X)$ $(i = 1, \ldots, m)$,
$(3.2)_2$ $\mathrm{car}(\mathcal{M}) \cap {}^t f'^{-1}(T^*_Z Y) \subset \cup_i T^*_{Z_i}X$.

(Remarquons que $(3.2)_2$ entraine que f est non-caractéristique pour $\mathcal{M}$.)

Le problème de Cauchy à données holomorphes ramifiées s'écrit donc, dans le language des $\mathcal{D}$-modules, sous la forme:

Théorème 3.1. *On a un isomorphisme naturel:*

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X})|_Z \longrightarrow \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y})|_Z \tag{3.3}$$

Preuve. Avec les notations du Théorème 2.1, on pose $F = \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$, $K_i = K^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X}$, $L = K^{\mathrm{ram}}_{Z/Y}$ et l'on note qu'on a les morphismes naturels d'adjonction $\tau : L = p_{Y!}p_Y^!\mathbb{C}_Y \to \mathbb{C}_Y$, $\tau_i : K_i = p_{X!}p_X^!\mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_X$. Toutes les hypothèse du Théorème 2.1 sont alors aisément vérifiées sauf, peut-être, (H5) qui découle du Lemme 3.2 suivant. Q.E.D.

Lemme 3.2. *Le morphisms τ induit pour tout $y \in Z$ un isomorphisme:*

$$\mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}L \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}\mathbb{C}_Y.$$

Preuve. On a les isomorphismes $\mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}L \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}g^{-1}p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}} \simeq g^{-1}\mathrm{R}\Gamma_{\{0\}}p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}}$ et

$\mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}\mathbb{C}_Y \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\{y\}}g^{-1}\mathbb{C}_{\mathbb{C}} \simeq g^{-1}\mathrm{R}\Gamma_{\{0\}}\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ et on est alors réduit à prouver l'isomorphisme $\mathrm{R}\Gamma_{\{0\}}p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}} \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\{0\}}\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$. Comme $p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}}$ est $\mathbb{R}^+$-conique pour l'action de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{C}$, on a $\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{C}, \mathrm{R}\Gamma_{\{0\}}p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}}) \simeq \mathrm{R}\Gamma_c(\mathbb{C}, p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}}) = \mathrm{R}\Gamma_c(\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}, \mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}}) \simeq \mathbb{C}[2]$, et donc $\mathrm{R}\Gamma_{\{0\}}p_!\mathbb{C}_{\widetilde{\mathbb{C}_{\{0\}}}} \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}[2] \simeq \mathrm{R}\Gamma_{\{0\}}\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$. Q.E.D.

Remarque 3.3. Dans le cas d'un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X\, P$, où P est un opérateur différentiel de degré m à caractéristiques simples transverses à $Y \times_X T^*X$, on retrouve ainsi le théorème de [H-L-W].

Remarque 3.4. La même démonstration s'applique en remplaçant les faisceaux $\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z/Y}$, $\sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_i/X}$ des fonctions holomorphes ramifiées du type général par les faisceaux $\mathcal{O}^1_{Z/Y}$, $\sum_i \mathcal{O}^1_{Z_i/X}$ des fonctions à ramification de type logarithmique (c'est alors un résultat de [K-S 1])

3.2. Soit $0 \in X$ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$ avec coordonnées $x = (x_0, x')$ et soit $Y = \{x \in X;\, x_0 = 0\}$. Soit $T \subset Y$ la queue d'aronde définie en tant que le lieu des points $x' \in Y$ tels que le polynôme en z, $A(z, x') = z^{n+1} - x_n z^{n-1} - \cdots - x_2 z - x_1$, ait au moins une racine double. Soit $\widetilde{Y} \subset \mathbb{C}_z \times Y$ la variété d'équation $A(z, x') = 0$. On considère le morphisme induit par la projection sur le premier facteur $p : \widetilde{Y} \to Y$. La queue d'aronde T est alors l'image des points de $\widetilde{Y}$ où p n'est pas de rang maximum (le "contour apparent" de $\widetilde{Y}$). On remarque aussi que, même si T est une variété singulière, sa conormale $\Lambda = \overline{T^*_{T_{\mathrm{reg}}} Y}$ est une Lagrangienne, lisse dans $\dot{T}^*X$, qui a une seule direction au dessus de 0.

Le faisceau $p_! \mathbb{C}_{\widetilde{Y}}$ a son micro-support dans $T^*_Y Y \cup \Lambda$. En particulier il est localement constant sur $Y \setminus T$. Le faisceau $\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{T/Y} := \mathrm{R}\mathcal{H}om(p_! \mathbb{C}_{\widetilde{Y}}, \mathcal{O}_Y)$ est alors un faisceau de fonctions holomorphes sur Y ramifiées le long de T.

Soit T_i $(i = 1, \ldots, m)$ une queue d'aronde de X et soit $\Lambda_i = \overline{T^*_{T_{i\,\mathrm{reg}}} X}$. On suppose les T_i deux à deux transverses (i.e. $\Lambda_i \cap \Lambda_j \subset T^*_X X$ pour $i \neq j$) et transverses à Y avec $T_i \cap Y = T$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent tel que

$(3.4)_1$ f_π est non-caractéristique pour $C(\mathrm{car}(\mathcal{M}), \Lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$,
$(3.4)_2$ $\mathrm{car}(\mathcal{M}) \cap {}^t f'^{-1}(\Lambda) \subset \cup_i \Lambda_i$.

En définissant $\sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{T_i/X}$ comme dans (3.1) on peut alors énoncer le

Théorème 3.5. *On a un isomorphisme naturel:*

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_i \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{T_i/X})_{\{0\}} \longrightarrow \mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{T/Y})_{\{0\}}$$

Comme pour le Théorème 3.1 cet énoncé est un corollaire immédiate du Théorème 2.1, la seule vérification à faire étant l'isomorphisme:

$$\mathrm{R}\Gamma_{\{0\}} p_! \mathbb{C}_{\widetilde{Y}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\Gamma_{\{0\}} \mathbb{C}_Y.$$

Ce dernier point découle du fait que la fibre de p au dessus de 0 est reduite à un point, et que $\widetilde{Y}$ est une variété complexe de la même dimension que Y.

Remarque 3.6. Dans le cas d'un $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X\, P$, où P est un opérateur différentiel de degré m à caractéristiques simples transverses à $Y \times_X T^*X$, on retrouve le théorème de [Le 2] (dans ce travail Leitchnam montre aussi que le flot de $\mathrm{car}(P)$ issue de Λ est une réunion de conormales à des queues d'arondes).

References

[A] E. Andronikof, *Intégrales de Nilsson et faisceaux constructibles*, ce séminaire, exp. III (1990-91); Bull. Soc. Math. France (1992) (to appear).

[D'A] A. D'Agnolo, *Inverse image for the functor μhom*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **27** (1991), 509–532.

[D'A-S] A. D'Agnolo, P. Schapira, *Un théorème d'image inverse pour les faisceaux. Applications au problème de Cauchy*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I **311** (1990), 23–26; *An inverse image theorem for sheaves with applications to the Cauchy problem*, Duke Mathematical Journal, No. 3 **64** (1991); *On the ramified Cauchy problem*, in "D-modules and microlocal geometry", T. Monteiro Fernandes, M. Kashiwara, P. Schapira ed., Walter de Gruyter Publ. (1992).

[D] P. Deligne, *Le formalisme des cycles évanescents*, SGA 7, exposé XIII.

[G] A. Grothendieck, SGA 7, exposé I.

[H] T. Hamada, *The singularities of the solution of the Cauchy problem*, Publ. R.I.M.S. Kyoto University **5** (1969), 20–40.

[H-L-W] T. Hamada, J. Leray, C. Wagschal, *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle*, J. Math. Pures et Appl. **55** (1976), 297–352.

[K 1] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Thesis (in japanese) , Tokyo (1971).

[K 2] M. Kashiwara, *Systems of microdifferential equations*, Progress in Math., Birkhäuser, Boston **34** (1983).

[K-S 1] M. Kashiwara, P. Schapira, *Problème de Cauchy pour les systèmes microdifferentiels dans le domain complexe*, Inventiones Math. **46** (1978), 17–38.

[K-S 2] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag **292** (1990).

[Le 1] E. Leichtnam, *Le problème de Cauchy ramifié*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **23** (1990), 369–443.

[Le 2] E. Leichtnam, *Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques*, ce séminaire (1991).

[L] J. Leray, *Problème de Cauchy I*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 389–430.

[P-S] Ph. Pallu de la Barrière, P. Schapira, *Application de la théorie des microfonctions holomorphes au problème de Cauchy à données singulières*, Sem. Goulaouic-Schwartz (1975-76).

Département de Mathématiques (URA CNRS 742), Université Paris Nord, F-93430 Villetaneuse, France

Dipartimento di Matematica, Università di Padova, via Belzoni 7, I-35131 Padova, Italie