

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

ANNO ACCADEMICO 2020/2021

LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA INFORMATICA E DELL'INFORMAZIONE
PROGRAMMA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2

Testo consigliato: *Analisi matematica* di Bertsch, Dal Passo e Giacomelli (McGraw-Hill, 2011).

Ulteriori informazioni sono disponibili a partire dalla home page del corso: tiny.cc/an2

Legenda: (★) = con dimostrazione.

1. Funzioni di più variabili TOPOLOGIA IN \mathbb{R}^n : Norma euclidea, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare (★). Distanza euclidea. Intorni sferici. Punti di accumulazione e isolati. Punti interni, esterni, di frontiera. Insiemi aperti e chiusi e loro proprietà. Il simbolo ∞ e i suoi intorni. LIMITI: Limiti di funzioni scalari e vettoriali di n variabili, loro proprietà. Continuità e sue proprietà elementari. Limiti di successioni e teorema ponte. Teorema dei due carabinieri. Esempi di non esistenza di limiti. Uso di restrizioni (★) e delle coordinate polari per il calcolo di limiti. FUNZIONI CONTINUE: Insiemi compatti e Teorema di Weierstrass. Teorema di permanenza del segno. Curve e insiemi connessi. Teorema degli zeri (★) e Teorema dei valori intermedi. CALCOLO DIFFERENZIALE DI FUNZIONI SCALARI IN PIÙ VARIABILI: Derivate direzionali e parziali, gradiente. Funzioni differenziabili e loro proprietà (★). Piano tangente a un grafico (★). Direzione di massima pendenza (★). Teorema del differenziale totale; teorema del valor medio. Derivate successive, matrice Hessiana, teorema di Schwarz e sue conseguenze. Formula di Taylor di ordine 2 con i resti di Peano e di Lagrange (★). FORME QUADRATICHE: Richiami su autovalori e teorema spettrale per matrici simmetriche. Forme definite e semidefinite positive e negative, forme indefinite: caratterizzazione mediante gli autovalori. Criteri di definitezza per le forme in due variabili. INSIEMI CONVESSI E FUNZIONI CONVESSE: Caratterizzazione delle funzioni convesse differenziabili una volta (★) e due volte. MASSIMI E MINIMI: Estremi liberi: Teorema di Fermat (★), determinazione della natura dei punti critici mediante la convessità e la matrice Hessiana (★, per l'Hessiana). Estremi vincolati a insiemi la cui frontiera è una curva parametrica. FUNZIONI A VALORI VETTORIALI: Differenziabilità e matrice Jacobiana. Derivazione di funzioni vettoriali composte. INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRI: Teoremi di passaggio al limite e di derivazione sotto il segno di integrale.

2. Integrali curvilinei e forme differenziali CURVE: Curve semplici, chiuse, di Jordan, in coordinate polari, regolari, regolari a tratti. Vettore, versore e retta tangente. Ortogonalità del gradiente di una funzione scalare di due variabili rispetto alle sue curve di livello (★). INTEGRALI DI FUNZIONI VETTORIALI DI UNA VARIABILE: Teorema fondamentale del calcolo e disuguaglianza per la norma dell'integrale. INTEGRALI CURVILINEI: Lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve C^1 (★, per l'implicazione vista a lezione) e formula per la lunghezza. Indipendenza della lunghezza dal cambiamento di parametro (★). Integrali di prima specie. Baricentro di una curva. Ascissa curvilinea e sue proprietà (★). FORME DIFFERENZIALI: Interpretazione come lavoro di un campo vettoriale di forze. Integrali curvilinei di seconda specie, proprietà e comportamento rispetto a curve equivalenti (★). Forme differenziali esatte e campi conservativi, funzione primitiva e potenziale. Caratterizzazione delle forme esatte con gli integrali di seconda specie (★). Forme differenziali chiuse e loro relazione con le forme esatte (★). Rotore e campi irrotazionali. Curve omotope e insiemi semplicemente connessi. Invarianza dell'integrale di una forma chiusa su curve omotope, equivalenza tra forme chiuse e forme esatte in insiemi semplicemente connessi.

3. Integrazione di funzioni di più variabili INTEGRALI DOPPI SU UN RETTANGOLO: Suddivisioni, somme di Riemann, definizione di integrale e sue proprietà (linearità, monotonia, teorema della media...). Integrabilità delle funzioni continue. Formule di riduzione. INTEGRALI DOPPI: CASO GENERALE: Definizione di funzione integrabile. Insiemi misurabili e loro caratterizzazione, insiemi di misura nulla e loro caratterizzazione. Misura del grafico di una funzione integrabile su un intervallo. Integrabilità delle funzioni continue. Additività dell'integrale rispetto al dominio. Domini semplici (normali) e formule di riduzione su di essi (★). Teorema del cambiamento di variabili. Coordinate polari. Baricentro di un insieme misurabile. INTEGRALI TRIPLI: Definizione di funzione integrabile, insiemi misurabili e loro caratterizzazione, misura del grafico di una funzione integrabile su un insieme misurabile. Integrabilità delle funzioni continue. Baricentro di un insieme misurabile. Formule di riduzione per fili e per strati. Teorema del cambiamento di

variabili. Coordinate cilindriche e sferiche. Volume di un solido di rotazione (\star). INTEGRALI SU DOMINI ILLIMITATI: Successioni invadenti e funzioni assolutamente integrabili. Integrale di funzioni assolutamente integrabili e indipendenza dalla successione invadente. Integrale della Gaussiana in due variabili e in una variabile.

4. Superficie e integrali di superficie SUPERFICIE PARAMETRICHE REGOLARI: Significato della definizione, curve coordinate e vettori tangenti; piano tangente e vettore normale alla superficie. Superficie cartesiane, sfere, coni. INTEGRALI SUPERFICIALI: Definizione di area di una superficie e di integrale superficiale, sue motivazioni. Teorema di Guldino (\star) sull'area di una superficie di rotazione. Baricentro di una superficie. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie; superficie chiuse e flusso uscente. TEOREMA DELLA DIVERGENZA: Teoremi della divergenza di Gauss in \mathbb{R}^3 (\star per domini semplici rispetto a tutti gli assi). Campi solenoidali e $\text{div rot } \mathbf{F} = 0$ (\star). Formule di Gauss-Green nel piano (\star per domini semplici rispetto agli assi) e applicazioni al calcolo di aree. Teorema della divergenza in \mathbb{R}^2 (\star). TEOREMA DEL ROTORE: Formula di Stokes in \mathbb{R}^2 (\star). Superficie con bordo, orientamento del bordo, circuitazione di un campo. Teorema del rotore di Stokes per superficie con bordo e per superficie chiuse.

5. Equazioni differenziali ordinarie ESISTENZA E UNICITÀ PER IL PROBLEMA DI CAUCHY: Teorema di esistenza di Peano. Lipschitzianità, continuità e derivabilità (\star). Teorema di esistenza locale e unicità della soluzione per equazioni del prim'ordine (\star strategia della dimostrazione dell'esistenza). Teorema di esistenza globale. EQUAZIONI DEL PRIM'ORDINE A VARIABILI SEPARABILI: Soluzione in forma implicita ed esplicita (\star); esempi di esplosione in tempo finito. Intervallo massimale di esistenza e studio qualitativo. EQUAZIONI LINEARI DEL PRIM'ORDINE: Integrale generale dell'equazione omogenea (\star). Soluzione particolare di equazioni non omogenee: variazione della costante (\star). SISTEMI DEL PRIMO ORDINE: Riduzione di un'equazione di ordine n ad un sistema $n \times n$. Esistenza e unicità locali per il problema di Cauchy. SISTEMI LINEARI: Esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy. Struttura di spazio vettoriale delle soluzioni dei sistemi omogenei (\star); Wronskiano e indipendenza delle soluzioni. Sistema non omogeneo: variazione delle costanti (\star). EQUAZIONI E SISTEMI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI: Base reale di soluzioni dell'omogenea (\star). Principio di sovrapposizione. Soluzione particolare di equazioni con termine noto "quasi polinomio". Metodo di eliminazione per passare da sistema a equazione.

6. Funzioni olomorfe FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA: Topologia, differenziabilità, derivabilità in senso complesso, funzioni olomorfe e intere. Condizioni di Cauchy-Riemann (\star). ESEMPI: Esponenziale, seno, coseno, logaritmo principale e potenze a esponente complesso. INTEGRALI CURVILINEI DI FUNZIONI COMPLESSE: Curve in campo complesso, integrali di funzioni di variabile complessa e forme differenziali associate. Teorema integrale di Cauchy per curve omotope e chiuse. Integrali di Fresnel. Formula integrale di Cauchy (\star), indice di avvolgimento di una curva. DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE: Derivabilità infinite volte di una funzione olomorfa e formula per le derivate (\star). PRIMITIVE: Teorema fondamentale del calcolo per funzioni complesse, esistenza di primitive delle funzioni olomorfe. SERIE DI POTENZE: Convergenza semplice e assoluta. Lemma di Abel, Raggio di convergenza (\star) e metodi di calcolo. Serie geometrica. Convergenza totale, derivabilità e integrabilità della somma. Serie di Taylor delle funzioni olomorfe (\star), funzioni analitiche, esempi. Teorema di Liouville (\star) e Teorema fondamentale dell'algebra (\star). Teorema degli zeri isolati. SVILUPPO DI LAURENT: Classificazione delle singolarità, caratterizzazione dei poli, funzioni meromorfe. RESIDUI: Teorema dei residui (\star). Calcolo di residui in un polo (\star), caso particolare di ordine 1 (\star). Calcolo di integrali mediante residui, proprietà di Jordan e applicazioni, funzioni razionali trigonometriche. Decomposizione in fratti semplici. INDICATORE LOGARITMICO: Ordine di una funzione meromorfa. Teorema dell'indicatore logaritmico.