Complementi al corso di Analisi 2 per Ingegneria dell'Informazione: Funzioni di variabile complessa

Andrea D'Agnolo, Università di Padova

Sommario

Diamo qui una breve presentazione della teoria delle funzioni di variabile complessa.

Indice

Si prega di segnalare eventuali errori a `dagnolo@math.unipd.it`

1 Numeri complessi

Ricordiamo che si dice *campo* dei numeri reali l'insieme $\mathbb{R}$ munito delle operazioni di somma e prodotto.

1.1 Definizione. Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è l'insieme $\mathbb{R}^2$ munito delle operazioni di somma e prodotto

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Si verifica che tali operazioni sono associative e commutative, e che la somma è distributiva rispetto al prodotto. L'elemento neutro di somma e prodotto sono $(0, 0)$ ed $(1, 0)$, rispettivamente, e si ha

$$-(x, y) = (-x, -y), \quad (x, y)^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}),$$

supponendo $(x, y) \neq (0, 0)$ nell'ultima equazione. Notiamo che, contrariamente al caso di $\mathbb{R}$, il campo $\mathbb{C}$ non ammette un ordinamento compatibile con le sue operazioni.

Osservando che $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ ed $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$, identifichiamo $\mathbb{R}$ ad un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ tramite l'applicazione iniettiva

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0).$$

Identifichiamo cioè $\mathbb{R}$ all'asse delle ascisse di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, e per $x \in \mathbb{R}$ scriviamo $x \in \mathbb{C}$ al posto di $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Le operazioni in $\mathbb{C}$ sono allora compatibili, oltre che con le operazioni di $\mathbb{R}$, anche con la struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$:

$$a_1(x_1, y_1) + a_2(x_2, y_2) = (a_1 x_1 + a_2 x_2, a_1 y_1 + a_2 y_2), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Nell'identificazione $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, si scrive 1 al posto del primo vettore $(1, 0)$ della base canonica. Il secondo vettore $(0, 1)$ della base canonica viene detto *unità immaginaria* e si indica con la lettera i. Osserviamo che vale la relazione

$$i^2 = -1.$$

Con queste notazioni, ogni numero complesso $z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ si può scrivere in uno ed un solo modo nella forma

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

1.2 Osservazione. Tramite la relazione $i^2 = -1$ si ritrova facilmente la formula per il prodotto: $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + (y_1 x_2 + x_1 y_2)i + y_1 y_2 i^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Se $z = (x, y)$ è un numero complesso, la sua *parte reale* e la sua *parte immaginaria* sono le sue coordinate:

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Il *modulo* e l'*argomento* di z sono le sue coordinate polari. Cioè, scritto $z = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$ con $\rho \geq 0$, si ha

$$|z| = \rho, \quad \operatorname{Arg} z = \theta.$$

Notiamo che l'argomento di 0 non è definito, e che l'argomento di $z \neq 0$ è definito a meno di multipli interi di 2π. In particolare, se $w = r(\cos t, \sin t)$ con $r > 0$, la scrittura $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w$ significa che $\theta = t + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

È comodo porre[1]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1.1}$$

Notiamo che $|e^{i\theta}| = 1$, ossia $e^{i\theta}$ giace sulla circonferenza unitaria del piano complesso. Se $z = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, la scrittura

$$z = \rho e^{i\theta}$$

è detta rappresentazione esponenziale di z. Usando le formule trigonometriche di addizione, si verifica la relazione

$$\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_1} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

ossia

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Vediamo allora che la moltiplicazione per z agisce geometricamente come un'omotetia di coefficiente $|z|$ seguita da una rotazione di angolo $\operatorname{Arg} z$. Se $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$, si ha

$$\frac{1}{z} = \left(\tfrac{1}{\rho}\right) e^{-i\theta}.$$

Si dice *coniugato* di $z = (x, y)$ la sua riflessione rispetto all'asse delle ascisse, ossia il numero complesso

$$\overline{z} = (x, -y) = x - iy.$$

È facile verificare che $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ e $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. Risulta inoltre

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

Se $z \neq 0$ si ha quindi

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

1.3 Esempio. Cerchiamo le radici m-esime di $z \in \mathbb{C}$, ossia le soluzioni $w \in \mathbb{C}$ di

$$w^m = z.$$

Se $z = 0$, l'unica soluzione è $w = 0$. Se $z \neq 0$, posto $w = re^{it}$ si ha $w^m = r^m e^{imt}$. L'equazione $w^m = z$ porge allora

$$r^m = |z|, \quad mt = \operatorname{Arg} z.$$

Vi sono quindi m soluzioni distinte: se $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$, si ha

$$w = \sqrt[m]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{m} + k\frac{2\pi}{m}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Geometricamente, le radici m-esime complesse di z sono i punti di angolo $\frac{1}{m}\operatorname{Arg} z$ sulla circonferenza di raggio $\sqrt[m]{|z|}$ centrata in 0. Queste costituiscono quindi i vertici di un poligono regolare ad m lati.

[1] Come spiegheremo nell'Osservazione 6.6, questo è compatibile con la definizione naturale di funzione esponenziale tramite serie di potenze.

Per $z = x + iy$, poniamo[1]

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Come nel caso reale, risulta $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Essendo poi $e^0 = 1$, se ne deduce $1/e^z = e^{-z}$. Valgono inoltre le relazioni $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Notiamo che si ha

$$e^z = e^{z+2k\pi i}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

1.4 Esempio. Cerchiamo i logaritmi di $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ossia le soluzioni $w \in \mathbb{C}$ di

$$e^w = z.$$

Posto $w = u + iv$, si ha $z = e^u e^{iv}$, e quindi

$$|z| = e^u, \quad \operatorname{Arg} z = v.$$

Questo fornisce le infinite soluzioni

$$w = \log|z| + i \operatorname{Arg} z, \tag{1.3}$$

ossia, se $z = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$,

$$w = \log \rho + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2 Funzioni olomorfe

Una funzione complessa di variabile complessa è una funzione

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C}, \qquad \Omega \subset \mathbb{C}.$$

Dato che $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, una tale f non è altro che una funzione di due variabili reali a valori in $\mathbb{R}^2$. Sappiamo quindi cosa voglia dire che f sia continua, derivabile parzialmente, o differenziabile. Più esplicitamente, indichiamo con $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ le parti reale ed immaginaria di f, e scriviamo $z = x + iy$. Allora $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ è continua se lo sono sia u che v. Si ha poi ad esempio $\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial}{\partial x} u + i \frac{\partial}{\partial x} v$. Dovendo considerare limiti e derivate, supponiamo nel seguito per semplicità

$$\Omega \subset \mathbb{C} \text{ è un sottoinsieme aperto.}$$

Consideriamo due operatori di derivazione particolarmente utili nel trattare funzioni di variabile complessa:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

2.1 Lemma. *La funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ è differenziabile in $z_0 \in \Omega$ se e solo se esistono $c, d \in \mathbb{C}$ tali che*

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + c \cdot w + d \cdot \overline{w} + o(|w|), \quad w \to 0. \tag{2.1}$$

In tal caso si ha $c = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0)$ e $d = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f(z_0)$.

Dimostrazione. Sia $f = u + iv$. Nell'identificazione $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $f = (u, v)$ è differenziabile in $z_0 = (x_0, y_0)$ se e solo se lo sono le sue componenti, ossia

$$u(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0) \cdot k + o(|(h, k)|),$$
$$v(x_0 + h, y_0 + k) = v(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) \cdot k + o(|(h, k)|),$$

per $(h, k) \to (0, 0)$. Posto $w = h + ik$, queste relazioni possono essere compendiate nella

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(z_0) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y} f(z_0) \cdot k + o(|w|), \quad w \to 0.$$

Notando che $h = \frac{w+\overline{w}}{2}$, $k = \frac{w-\overline{w}}{2i}$, possiamo riscrivere questa relazione nella forma (2.1). $\square$

Una nozione di derivabilità specifica alle funzioni complesse di variabile complessa è data dalla seguente

2.2 Definizione. Siano $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Se esiste il limite di funzione in due variabili

$$f'(z_0) = \lim_{w \to 0 \in \mathbb{C}} \frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w},$$

questo si dice derivata in senso complesso di f in z_0.

2.3 Esempio. (i) La funzione $f(z) = z$ è derivabile in senso complesso in ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, e si ha $f'(z_0) = 1$. Infatti, risulta $\frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} = 1$.

(ii) La funzione $f(z) = \overline{z}$ non è derivabile in senso complesso in nessun $z_0 \in \mathbb{C}$. Infatti, posto $w = (h, k)$, si ha

$$\frac{f(z_0 + w) - f(z_0)}{w} = \frac{\overline{w}}{w} = \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} - i \frac{2hk}{h^2 + k^2}.$$

La non derivabilità di f segue quindi dalla non esistenza dei limiti

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}, \qquad \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{2hk}{h^2 + k^2}.$$

Con dimostrazione simile a quella per funzioni di variabile reale si ha

2.4 Proposizione. *Le regole usuali di derivazione (algebra delle derivate, derivata di funzione composta, derivata di funzione inversa) valgono per le derivate in senso complesso.*

2.5 Lemma. *La funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ è derivabile in senso complesso in $z_0 \in \Omega$ se e solo se esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che*

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + c \cdot w + o(|w|), \quad w \to 0, \tag{2.2}$$

ed in tal caso si ha $c = f'(z_0)$.

2.6 Definizione. La funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* in Ω se è derivabile in senso complesso in ogni punto di Ω e se f' è continua[2] in Ω. Una funzione si dice olomorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$ se è olomorfa in un intorno di z_0. Una funzione olomorfa in tutto il piano $\mathbb{C}$ si dice *intera*.

[2]Quest'ultima condizione è ridondante: si può dimostrare (ma noi non lo faremo) che se f è derivabile in senso complesso, allora f' è continua.

2.7 Proposizione. *La funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è di classe C^1 e vale la condizione*

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} f = 0,$$

detta condizione di Cauchy-Riemann. *In tal caso valgono le relazioni*

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y} f(z_0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia olomorfa. Allora f è differenziabile grazie al Lemma 2.5. Inoltre, confrontando (2.1) e (2.2), otteniamo le relazioni

$$\tfrac{\partial}{\partial z} f = f', \quad \tfrac{\partial}{\partial \bar z} f = 0. \tag{2.3}$$

Supponiamo viceversa che $f \in C^1(\Omega)$ soddisfi la condizione di Cauchy-Riemann. Allora (2.1) porge per ogni $z_0 \in \Omega$

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \tfrac{\partial}{\partial z} f(z_0) \cdot w + o(|w|), \quad w \to 0.$$

Segue quindi dal Lemma 2.5 che f è derivabile in senso complesso in $z_0 \in \Omega$ con derivata $f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0)$. □

2.8 Osservazione. Scritta $f = u + iv$, si ha

$$\tfrac{\partial}{\partial \bar z} f = \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial}{\partial x}(u + iv) - \tfrac{1}{2i}\tfrac{\partial}{\partial y}(u + iv) = (\tfrac{\partial}{\partial x} u - \tfrac{\partial}{\partial y} v) + i(\tfrac{\partial}{\partial y} u + \tfrac{\partial}{\partial x} v).$$

La condizione di Cauchy-Riemann si può allora riscrive come

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial y} v, \\ \frac{\partial}{\partial y} u = -\frac{\partial}{\partial x} v. \end{cases}$$

Notiamo che tali condizioni equivalgono alla chiusura della forma differenziale complessa

$$f\,dz = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy),$$

ossia alla chiusura delle forme differenziali reali $u\,dx - v\,dy$ e $v\,dx + u\,dy$.

3 Esempi di funzioni olomorfe

Notiamo che, grazie alla Proposizione 2.7 è immediato ritrovare i risultati dell'Esempio 2.3. Essendo quindi $z \mapsto z$ una funzione intera, utilizzando l'algebra delle derivate si ha che

• un polinomio complesso $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m$, $c_j \in \mathbb{C}$, è una funzione intera.

Più in generale, se $Q(z)$ è un altro polinomio,

• una funzione razionale complessa $P(z)/Q(z)$ è olomorfa nel piano complesso privato degli zeri di Q.

• La funzione esponenziale complessa e^z è intera, come si verifica facilmente tramite le condizioni di Cauchy-Riemann. Notiamo che per $z \in \mathbb{R}$ la funzione e^z coincide con l'esponenziale reale. Inoltre (1.2) asserisce che la funzione esponenziale è periodica di periodo $2\pi i$.

In (1.3) abbiamo trovato i logaritmi complessi. Dato che la corrispondenza $z \mapsto \operatorname{Arg} z$ è multivalutata e non definisce una funzione, consideriamo l'*argomento principale* di z dato da

$$\arg z\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}, \quad z \mapsto \theta,$$

dove θ è l'unico numero reale con $-\pi < \theta \leq \pi$ tale che si abbia $z = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$ per qualche $\rho \geq 0$. Notiamo che la funzione arg è discontinua lungo l'asse reale negativo, infatti

$$\lim_{y \longrightarrow 0\pm} \arg(x+iy) = \begin{cases} \pm\pi & \text{se } x < 0, \\ \pm\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ricordando (1.3), la funzione *logaritmo principale* è definita da:

$$\log z = \log|z| + i \arg z, \quad z \neq 0.$$

Notiamo che le soluzioni di $z = e^w$ sono date da $w = \log z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

• La funzione $\log z$ è olomorfa nell'aperto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$,

in quanto inversa della funzione olomorfa e^z. Per z reale positivo, la funzione $\log z$ coincide con il logaritmo reale. La funzione log è discontinua lungo l'asse reale negativo. Vale la relazione

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

solo se $\arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi, \pi]$. Infatti ad esempio $\log((-1)(-1)) = \log 1 = 0$, mentre $\log(-1) + \log(-1) = 2\pi i$.

In analogia al caso reale, per $\alpha \in \mathbb{C}$ poniamo

$$z^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \log z} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0,\ \operatorname{Re}\alpha > 0. \end{cases}$$

Ad esempio, si ha $i^i = e^{i \log i} = e^{-\pi/2}$.

• La funzione z^α è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$,

in quanto composta di olomorfe. Per m intero, la funzione z^m coincide con la potenza m-esima usuale di z. Per m intero positivo, la funzione $z^{1/m}$ è una radice m-esima complessa di z, detta *radice principale*. Vale la relazione

$$(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$$

solo se $\arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi, \pi]$. Infatti ad esempio $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, mentre $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1$.

4 Formula integrale di Cauchy

Diciamo *dominio semplice* un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ che sia decomponibile come unione finita di domini semplici rispetto ad entrambi gli assi. In particolare, la frontiera ∂D di un dominio semplice $D \subset \mathbb{C}$ è un *circuito*, ossia un cammino orientato, chiuso, e regolare a tratti. Dal teorema di Gauss-Green si ottiene il

4.1 Lemma. *Sia $f \in C^1(\Omega)$, e sia D un dominio semplice con $\overline{D} \subset \Omega$. Allora*

$$\oint_{\partial D} f\, dz = 2i \iint_D \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}} f\, dxdy$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} f\, dz = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} (f\, dx + i f\, dy) = \frac{1}{2} \iint_D \left(\tfrac{\partial}{\partial x} f - \tfrac{1}{i} \tfrac{\partial}{\partial y} f\right) dxdy.$$

□

Grazie alle condizioni di Cauchy-Riemann si deduce la

4.2 Proposizione. *Sia f olomorfa in Ω e sia D un dominio semplice con $\overline{D} \subset \Omega$. Allora*

$$\oint_{\partial D} f\, dz = 0.$$

4.3 Teorema (formula integrale di Cauchy)**.** *Sia f olomorfa in Ω e sia $z_0 \in \Omega$. Se D è un dominio semplice con $z_0 \in D$ e $\overline{D} \subset \Omega$, allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Dimostrazione. Indichiamo con $B_\epsilon(z_0)$ il disco aperto di raggio ϵ centrato in z_0. Pur di scegliere ϵ abbastanza piccolo, possiamo supporre $\overline{B_\epsilon(z_0)} \subset D$. La frontiera del dominio semplice $E = D \setminus \overline{B_\epsilon(z_0)}$ è costituita dall'unione della frontiera di D e della frontiera di $B_\epsilon(z_0)$ percorsa in senso opposto. Dato che la funzione $\frac{f(z)}{z-z_0}$ è olomorfa in un intorno di $\overline{E}$, la Proposizione 4.2 implica

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{4.1}$$

La curva orientata $\partial B_\epsilon(z_0)$ è parametrizzata da $\theta \mapsto z_0 + \epsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Risulta allora

$$\oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})\, d\theta.$$

Osservando che il primo membro di (4.1) è indipendente da ϵ, ed utilizzando la continuità di f, si ottiene infine

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})\, d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0)\, d\theta = 2\pi i f(z_0).$$

□

Come vedremo, la formula integrale di Cauchy consente di ottenere molti risultati interessanti sulle funzioni olomorfe.

4.4 Proposizione. *Una funzione f olomorfa in Ω ammette derivate complesse di ogni ordine, anch'esse olomorfe. Se D è un dominio semplice con $z_0 \in D$ e $\overline{D} \subset \Omega$, vale*

$$f^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}}\, dz.$$

Dimostrazione. Per $z \in D$, la formula integrale di Cauchy porge

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

La funzione $\frac{f(w)}{w-z}$ è derivabile in senso complesso un numero arbitrario di volte rispetto alla variabile z. Lo stesso vale allora per la funzione $f(z)$, grazie al teorema di derivazione sotto il segno di integrale (valido anche per derivate complesse, con dimostrazione analoga al caso reale). La formula enunciata segue dalla relazione $\frac{d^m}{dz^m} \frac{f(w)}{w-z} = \frac{m!f(w)}{(w-z)^{m+1}}$. □

4.5 Proposizione (Disuguaglianza di Cauchy)**.** *Con le notazioni della Proposizione 4.4, vale la stima*

$$|f^{(m)}(z_0)| \leq \frac{m!}{2\pi} \frac{\ell(\partial D)}{\mathrm{dist}(z_0, \partial D)^{m+1}} \sup_{z \in \partial D} |f(z)|.$$

4.6 Corollario. *Sia f una funzione intera. Se esistono $C > 0$ ed $N \in \mathbb{N}$ per cui valga la stima $|f(z)| \leq C|z|^N$, allora f è un polinomio di grado al più N.*

In particolare, se f è limitata allora è costante.

Dimostrazione. Se $D = B_r(0)$ è il disco di centro 0 e raggio r, si ha $\ell(\partial D) = 2\pi r$, $\mathrm{dist}(z_0, \partial D) = r - |z_0|$ e $\sup_{z \in \partial D} |z| = r$. La disuguaglianza di Cauchy implica allora

$$|f^{(m)}(z_0)| \leq m! \, \frac{C\, r^{N+1}}{(r - |z_0|)^{m+1}}.$$

Facendo tendere r all'infinito, otteniamo $f^{(m)}(z_0) = 0$ per $m > N$. Quindi f è un polinomio di grado al più N.

Il caso in cui f sia limitata rientra nella discussione precedente con $N = 0$. □

Come applicazione dei risultati precedenti, siamo ora in grado di fornire una dimostrazione del

4.7 Teorema (fondamentale dell'algebra)**.** *Un polinomio complesso di grado n ammette n radici, contate con la loro molteplicità.*

Dimostrazione. Grazie alla regola di Ruffini, è sufficiente dimostrare che un polinomio P di grado strettamente positivo ammette una radice. Supponiamo per assurdo che non sia così. Allora P non si annulla mai. In tal caso, la funzione $1/P$ è intera. Avendosi $\lim_{z\to\infty} 1/P = 0$, la funzione $1/P$ è limitata. Quindi $1/P$ è costante per il Corollario 4.6. Ma questo è assurdo poiché abbiamo supposto P di grado strettamente positivo, e quindi non costante. □

5 Primitive

5.1 Definizione. Sia f olomorfa in Ω. Si dice che f ammette una primitiva se esiste una funzione F olomorfa in Ω tale che $F' = f$.

Ricordiamo dall'Osservazione 2.8 che, se f è olomorfa, allora la forma differenziale $f\,dz$ è chiusa.

5.2 Lemma. *Una funzione f olomorfa in Ω ammette primitiva se e solo se la forma differenziale $f\,dz$ è esatta in Ω.*

Dimostrazione. Se f ammette primitiva, allora esiste F olomorfa in Ω con $F' = f$. Essendo $F_{\overline{z}} = 0$ e $F_z = F'$, si ottiene $dF = F'\,dz = f\,dz$.

Se $f\,dz$ è esatta, esiste $F \in C^1(\Omega)$ tale che $f\,dz = dF$. Da $f\,dz = F_z\,dz + F_{\overline{z}}\,d\overline{z}$ seguono allora le relazioni $F_z = f$ e $F_{\overline{z}} = 0$. Quindi F è olomorfa e $F' = F_z = f$. □

Da un noto criterio di esistenza delle primitive per forme differenziali (reali) otteniamo

5.3 Proposizione. *Sia f olomorfa in Ω semplicemente connesso. Fissato $z_0 \in \Omega$, una primitiva di f in Ω è la funzione*

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0,z}} f(w)\,dw,$$

dove $\gamma_{z_0,z}$ è un'arbitraria curva orientata regolare a tratti a sostegno in Ω, con origine z_0 ed estremo z.

5.4 Esempio. La parte reale ed immaginaria della forma $\frac{dz}{z}$ sono date da

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\frac{dz}{z} &= \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = d\log\sqrt{x^2+y^2},\\
\mathrm{Im}\,\frac{dz}{z} &= \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.
\end{aligned}$$

Quest'ultima è il *differenziale d'angolo*, che sappiamo non essere esatto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Quindi $\frac{dz}{z}$ non è esatta in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Inoltre, se D è un dominio semplice con $0 \in D$ risulta

$$\oint_{\partial D} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

6 Serie di potenze

Ad una serie di potenze in campo complesso

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n \in \mathbb{C},$$

si associa il suo *raggio di convergenza*

$$R = \sup\{|z| \colon f(z) \text{ converge}\} \in [0, +\infty],$$

e si chiama disco di convergenza il disco $\{z \colon |z - z_0| < R\}$ di centro z_0 e raggio R.

6.1 Osservazione. Si dimostra come nel caso reale che, se esiste uno dei limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|},$$

allora R ne è il reciproco. Più in generale si ha $1/R = \limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$.

Riassumiamo qui di seguito i principali risultati sulle serie di potenze in campo complesso. Le dimostrazioni sono analoghe al caso reale.

6.2 Teorema. *Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$. Allora:*

(i) La serie $f(z)$ converge assolutamente all'interno del disco di convergenza, e totalmente in ogni sottoinsieme compatto del disco. Inoltre, la serie $f(z)$ diverge fuori dalla chiusura del disco di convergenza.

(ii) La serie complessa derivata $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n$ ha lo stesso raggio di convergenza di f, e vale $f' = g$. In particolare, f è olomorfa all'interno del disco di convergenza.

(iii) La serie primitiva $F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_{n-1}}{n}(z-z_0)^n$ ha lo stesso raggio di convergenza di f, ed F è una primitiva di f all'interno del disco di convergenza.

Osserviamo che, come nel caso reale, senza ulteriori informazioni non si può dire nulla sul comportamento di una serie di potenze lungo la frontiera del suo disco di convergenza. Ad esempio, tra le serie con centro 0 e raggio di convergenza 1 si ha: $\sum z^n$ diverge per $|z| = 1$, $\sum \frac{1}{n^2}z^n$ converge assolutamente per $|z| = 1$, $\sum \frac{1}{n}z^n$ diverge per $z = 1$ ma converge semplicemente per $|z| = 1$ con $z \neq 1$.

6.3 Definizione. Una funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *analitica* in Ω se è localmente rappresentabile tramite serie di potenze. Ossia se per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono un reale $r > 0$ ed una serie di potenze $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ con raggio di convergenza almeno r, tali che $f(z) = g(z)$ per tutti gli $z \in \Omega$ con $|z - z_0| < r$.

6.4 Teorema (sviluppo in serie di Taylor)**.** *Se f è olomorfa nel disco $\{z\colon |z-z_0| < R\}$, allora*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Dimostrazione. Dato z nel disco, fissiamo $r \in \mathbb{R}$ con $|z - z_0| < r < R$, e poniamo $D = \{z\colon |z-z_0| \le r\}$. La formula integrale di Cauchy porge

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}\,dw. \tag{6.1}$$

Per $w \in \partial D$ si ha

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-z_0+z_0-z} = \frac{f(w)}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\frac{z-z_0}{w-z_0} = \frac{z-z_0}{r} < 1$. Integrando (6.1) per serie, otteniamo allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right)(z-z_0)^n.$$

Da cui la conclusione grazie al Corollario 4.4. □

6.5 Corollario. *Una funzione $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se è analitica.*

Dimostrazione. Se f è olomorfa, allora è analitica grazie al Teorema 6.4. Se f è analitica, allora è derivabile in senso complesso grazie al Teorema 6.2. $\square$

Come per i polinomi di Taylor, anche per le serie di Taylor vale un risultato di unicità per i coefficienti. Ossia, se $f(z) = \sum c_n(z-z_0)^n$ e $f(z) = \sum d_n(z-z_0)^n$, allora $c_n = d_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Ecco lo sviluppo in serie di Taylor, centrate in 0, di alcune funzioni olomorfe:

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}\, z^n = 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \cdots\,, && z \in \mathbb{C},\\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 + \cdots\,, && z \in \mathbb{C},\\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n} = 1 - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{24}z^4 + \cdots\,, && z \in \mathbb{C},\\
\log(1+z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n = z - \tfrac{1}{2}\, z^2 + \tfrac{1}{3}\, z^3 + \cdots && |z| < 1,\\
(1+z)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tbinom{\alpha}{n}\, z^n = 1 + \alpha\, z + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, z^2 + \cdots && |z| < 1,
\end{aligned}$$

dove si è posto $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$.

6.6 Osservazione. Se non avessimo già introdotto la funzione esponenziale complessa, sarebbe stato naturale *definirla* tramite $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, z^n$. In questo caso, la relazione (1.1) si sarebbe potuta dedurre: $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} i^n\theta^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^n + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^n = \cos\theta + i\sin\theta$.

6.7 Osservazione. In campo reale vi sono funzioni C^∞ che non ammettono sviluppo in serie di Taylor. Un esempio è dato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Si verifica infatti che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ed $f^{(m)}(0) = 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. La serie di Taylor di f centrata in 0 converge allora ovunque alla funzione nulla, mentre $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$.

7 Zeri di funzioni olomorfe

Sia f olomorfa in un intorno di z_0, con $f(z_0) = 0$.

7.1 Definizione. Se $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si dice che z_0 è uno zero di *molteplicità infinita*. Altrimenti si dice che z_0 è uno zero di *molteplicità finita*. Più precisamente, z_0 è uno zero di molteplicità m se $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n < m$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Anziché zero di molteplicità finita od infinita, si dice anche zero di *ordine* finito od infinito.

7.2 Proposizione. *Sia f olomorfa in Ω. Un punto $z_0 \in \Omega$ è uno zero di f di molteplicità m se e solo se esiste una funzione g olomorfa in Ω, con $g(z_0) \neq 0$, tale che*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

In particolare, uno zero di molteplicità finita è isolato, ossia è l'unico zero per f in un intorno.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \Omega$ uno zero di f di molteplicità m. Posto $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$, per $|z - z_0| < R$ si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m},$$

dove l'ultima uguaglianza segue da $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n < m$. Basta allora porre

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z), & z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\ \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}, & |z - z_0| < R. \end{cases}$$

Viceversa, sia $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$. Scriviamo $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ in un intorno di z_0. Risulta allora $f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_{n-m}(z - z_0)^n$. Dall'unicità dei coefficienti della serie di Taylor di f, segue che $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n < m$. □

7.3 Proposizione. *Sia f olomorfa in Ω. Un punto $z_0 \in \Omega$ è uno zero di f di molteplicità infinita se e solo se f è identicamente nulla nella componente connessa di z_0 in Ω.*

Dimostrazione. Se z_1 è un punto nella stessa componente connessa di z_0 in Ω, dobbiamo verificare che $f(z_1) = 0$. Sia $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ un cammino di origine z_0 ed estremo z_1. Poniamo

$$\tau = \sup\{t \in [0,1] \colon f^{(m)}(\gamma(s)) = 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \forall s < t\}.$$

Dobbiamo verificare che $\tau = 1$. Essendo z_0 uno zero di molteplicità infinita, lo sviluppo di Taylor di f centrato in z_0 è identicamente nullo, e quindi f si annulla in un intorno di z_0. Si ha allora $\tau > 0$. Supponiamo per assurdo $\tau < 1$. Dato che $f^{(n)}(\gamma(\tau)) = \lim_{t \to \tau-} f^{(n)}(\gamma(t)) = 0$, il punto $\gamma(\tau)$ è uno zero di molteplicità infinita. Quindi f si annulla in un intorno aperto U di $\gamma(\tau)$. Sia $\sigma > \tau$ tale che $\gamma(s) \in U$ per $\tau \leq s \leq \sigma$. Allora $f^{(m)}(\gamma(s)) = 0$ per ogni $s < \sigma$, contro la massimalità di τ. □

7.4 Corollario (Unicità del prolungamento)**.** *Siano f e g olomorfe in Ω connesso. Allora $f = g$ sotto una delle seguenti ipotesi*

(i) f e g hanno lo stesso sviluppo in serie di Taylor in un punto di Ω;

(ii) l'insieme $\{z \colon f(z) = g(z)\}$ ha un punto non isolato.

Dimostrazione. In ognuno di questi casi la funzione olomorfa $f - g$ ha uno zero di molteplicità infinita. □

In particolare, $f = g$ se $f(z) = g(z)$ in un intorno di un punto di Ω, oppure se $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ e $f(x) = g(x)$ per $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$. Quest'ultima condizione garantisce ad esempio che le funzioni e^z e $\log z$ sono le uniche funzioni olomorfe che coincidono con le funzioni e^x e $\log x$, rispettivamente, sull'asse reale.

8 Serie di Laurent

Considereremo ora delle serie bilatere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Per definizione, diremo che una tale serie $f(z)$ converge (semplicemente, assolutamente o totalmente) se convergono entrambe le serie classiche estratte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}.$$

8.1 Teorema (sviluppo in serie di Laurent)**.** *Se f è olomorfa nel disco privato del centro $\{z \colon 0 < |z - z_0| < R\}$, allora*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Inoltre, dato $r \in \mathbb{R}$ con $|z - z_0| < r < R$ e posto $D = \{z \colon |z - z_0| \leq r\}$, risulta

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz.$$

Come per le serie di Taylor, anche per le serie di Laurent vale un risultato di unicità per i coefficienti.

8.2 Definizione. Si dice che $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ ha in z_0 una singolarità: *eliminabile*, se $c_n = 0$ per ogni $n < 0$; *essenziale*, se $c_n \neq 0$ per infiniti $n < 0$; *polare* di ordine $m \geq 1$, se $c_n = 0$ per ogni $n < -m$. In quest'ultimo caso, z_0 è detto *polo* di ordine m. Quanto a terminologia, si dice anche *molteplicità* in luogo di *ordine*.

8.3 Teorema. *Se f è olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$, allora esiste un'unica coppia di funzioni (h, H) tali che h sia olomorfa in Ω, H sia intera, $H(0) = 0$, e*

$$f(z) = h(z) + H(\frac{1}{z - z_0}).$$

Tali h ed H si dicono *parte regolare* e *parte singolare* di f, rispettivamente.

8.4 Proposizione. *Sia f olomorfa in un intorno di z_0, tranne al più in z_0. Allora z_0 è una singolarità eliminabile se e solo se f estende a z_0 come funzione olomorfa. Questo equivale anche all'esistere finito il $\lim_{z \to z_0} f(z)$.*

Dimostrazione. L'enunciato segue osservando ognuno dei casi equivale all'annullarsi della parte singolare di $f(z)$. □

8.5 Proposizione. *Sia f olomorfa in un intorno di z_0, tranne che in z_0 stesso. Allora z_0 è un polo di f di ordine m se e solo se esiste una funzione olomorfa g, con $g(z_0) \neq 0$, tale che*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Questo equivale anche all'esistere finito il $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$.

Dimostrazione. L'enunciato segue osservando ognuno dei casi equivale all'annullarsi della parte singolare di $(z - z_0)^m f(z)$. □

9 Residui

9.1 Definizione. Sia f olomorfa in un intorno puntato di z_0. Si dice *residuo* di f in z_0 il coefficiente di $(z-z_0)^{-1}$ nel suo sviluppo in serie di Laurent centrato in z_0.

Notiamo che il Teorema 8.1 porge

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_r(z_0)} f(z)\,dz,$$

dove $B_r(z_0)=\{z\colon |z-z_0|<r\}$, con $r>0$ abbastanza piccolo in modo che f sia olomorfa in ogni punto di $\overline{B_r(z_0)}\setminus\{z_0\}$.

9.2 Proposizione. *Se z_0 è un polo di ordine m per f si ha:*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\longrightarrow z_0}\frac{1}{(m-1)!}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}.$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 8.5, possiamo scrivere $(z-z_0)^m f(z)=g(z)$ con g olomorfa in un intorno di z_0 e $g(z_0)\neq 0$. Sviluppando f e g in serie di Laurent, otteniamo che il residuo di f coincide con il $(m-1)$-esimo coefficiente di Taylor di g. Questo è dato da $\frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$. Concludiamo osservando che $g^{(m-1)}(z_0)=\lim_{z\longrightarrow z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$. $\square$

In particolare, se z_0 è un polo di ordine 1 per f si ha:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\longrightarrow z_0}(z-z_0)f(z).$$

9.3 Corollario. *Siano g ed h funzioni olomorfe in z_0. Se z_0 è uno zero di g e di h di molteplicità m ed $m+1$, rispettivamente, allora*

$$\operatorname{Res}_{z_0}\frac{g}{h} = (m+1)\frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m+1)}(z_0)}.$$

In particolare, se $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)\neq 0$, allora

$$\operatorname{Res}_{z_0}\frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

9.4 Teorema. *Sia f olomorfa in $\Omega\setminus\{z_1,\dots,z_k\}$, e sia D un dominio semplice con $\{z_1,\dots,z_k\}\subset D$ e $\overline{D}\subset\Omega$. Allora*

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}_{z_j} f.$$

Dimostrazione. Questa dimostrazione è simile a quella della formula integrale di Cauchy. Ricordiamo che $B_\epsilon(z_j)$ indica il disco aperto di raggio ϵ centrato in z_j. Pur di supporre ϵ abbastanza piccolo, si ha $\overline{B_\epsilon(z_j)}\subset D$ per ogni j. La frontiera del dominio semplice $E=D\setminus\bigcup_{j=1}^{k}\overline{B_\epsilon(z_j)}$ è costituita dall'unione della frontiera di D e delle frontiere di $B_\epsilon(z_j)$ percorse in senso opposto. Dato che f è olomorfa in un intorno di $\overline{E}$, la Proposizione 4.2 implica

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k}\oint_{\partial B_\epsilon(z_j)} f(z)\,dz.$$

$\square$

Il teorema dei residui fornisce un utile strumento per il calcolo di integrali definiti. Per questo rinviamo agli esercizi. Enunciamo invece un corollario interessante anche dal punto di vista ingegneristico, essendo alla base del criterio di stabilità di Nyquist in teoria del controllo.

9.5 Definizione. Se f è una funzione olomorfa in un intorno puntato di z_0, supposto una singolarità non essenziale per f, si dice *ordine* (o molteplicità) di f in z_0 l'intero

$$\operatorname{ord}_{z_0} f = \begin{cases} m, & \text{se } z_0 \text{ è uno zero di ordine } m, \\ -m, & \text{se } z_0 \text{ è un polo di ordine } m. \end{cases}$$

In particolare, $\operatorname{ord}_{z_0} f = 0$ se f estende come funzione olomorfa in z_0 con $f(z_0) \neq 0$.

9.6 Teorema (dell'indicatore logaritmico o principio dell'argomento). *Sia f olomorfa in Ω, tranne al più un numero finito di punti dove ha singolarità polari. Supponiamo che f abbia al più un numero finto di zeri, tutti di ordine finito. Sia D un dominio semplice con $\overline{D} \subset \Omega$ e frontiera ∂D disgiunta da zeri e poli di f. Allora*

$$\oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{a \in D} \operatorname{ord}_a f.$$

(Notiamo che la somma a secondo membro ha senso, dato che $\operatorname{ord}_a f \neq 0$ *per al più un numero finito di punti $a \in D$.)*

Dimostrazione. Grazie al Teorema 9.4 è sufficiente dimostrare l'uguaglianza

$$\operatorname{Res}_a \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_a f.$$

(i) Se a non è né zero né polo, entrambi i membri sono nulli.
(ii) Se a è uno zero di ordine $m > 0$, si ha $f(z) = (z-a)^m g(z)$ con $g(a) \neq 0$. Allora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

e quindi $\operatorname{Res}_a f = m$.
(iii) Se a è un polo di ordine $m > 0$, si ha $f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$ con $g(a) \neq 0$. Allora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

e quindi $\operatorname{Res}_a f = -m$.

□

In maniera informale possiamo così riassumere il teorema dell'indicatore logaritmico:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = (\text{numero di zeri di } f \text{ in } D) - (\text{numero di poli di } f \text{ in } D), \tag{9.1}$$

dove zeri e poli sono contati con la loro molteplicità. Per dare un'interpretazione geometrica del primo membro di (9.1), diamo la

9.7 Definizione. Sia γ un circuito in $\mathbb{C}$ a supporto disgiunto da z_0. L'*indice di avvolgimento* di γ intorno a z_0 è il numero

$$\operatorname{ind}_{z_0} \gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

9.8 Proposizione. *Si ha* $\operatorname{ind}_{z_0} \gamma \in \mathbb{Z}$. *In particolare, per un dominio* D *si ha* $\operatorname{ind}_{z_0} \partial D = 1$ *per* $z_0 \in D$, *ed* $\operatorname{ind}_{z_0} \partial D = 0$ *se* z_0 *è esterno alla chiusura di* D.

Cenno di dimostrazione. Dall'Esempio 5.4 sappiamo che la parte reale di $\frac{dz}{z-z_0}$ è esatta, mentre la parte immaginaria è il differenziale d'angolo. Quindi ind_{z_0} conta il numero di giri di γ intorno a z_0. □

Si verifica immediatamente che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \operatorname{ind}_0(f(\partial D)).$$

Il primo membro di (9.1) rappresenta quindi il numero di giri intorno all'origine del cammino composto $t \mapsto f(r(t))$, dove $r \colon I \to \mathbb{C}$ è una parametrizzazione di ∂D.

Indice analitico